204 – Connexité. Exemples et applications.

Intro : généralisation de la convexité, qui est difficile à se représenter. On se représente bien la connexité par arcs, qui caractérise les espaces qui ne sont pas en plusieurs morceaux, mais la connexité tout court est plus subtile.

- On commencera par étudier les notions de connexité et connexité par arcs, on verra des théorèmes qui nous serviront par la suite.
- On verra ensuite le rôle que joue la connexité en analyse, dans différents domaines : calcul diff, notamment en calcul diff et en analyse complexe.
- On finira sur la connexité dans les groupes topologiques.

I) Connexité et connexité par arcs

(X,T) un espace topologique. A une partie de X.

1) Connexité : propriétés générales [Gou] + [Pom]

Déf : X connexe si X n'est pas union de deux ouverts non vides disjoints. A est dite connexe si A n'est pas union de deux ouverts non vides et disjoints de la topologie induite [Gou 38]

Rq : c'est une ppté topologique, stable par homéo.

Ex : Q n'est pas connexe, R* n'est pas connexe [Gou 39] *(facile de les écrire comme réunion de deux intervalles disjoints)*

Prop : E une partie de E. est connexe ssi les seules parties ouvertes et fermées de E sont E et l'ensemble vide [Gou 39] *(pas long à montrer, très proche de la définition)*

Commentaire : ça nous servira souvent par la suite. Par ex pour montrer le prolongement analytique.

Prop : si A est connexe, et f continue sur A, alors f(A) est connexe [Gou 39] *(soit B une partie ouverte et fermée de f(E). Alors il existe O ouvert et F fermé de l'espace d'arrivée tq f(E)=O\cap f(E)=F\cap f(E). On mq f^-1(B) est ouvert et fermé donc connexe etc)*

Appl : GLn(R) n'est pas connexe *(car det est continue et R* n'est pas connexe)*

Prop : A est connexe ssi toute application A->{0,1} est constante [Gou 39] *(un sens simple, l'autre : par l'abs on suppose A non connexe, donc A=O U O'. On définit f qui vaut 1 sur l'un, 0 sur l'autre, elle est continue mais non constante, contradiction)*

Appl : Soit A une partie connexe de X, et B une partie de X. Supp que B est comprise entre A et l'adhérence de A. Alors B est connexe [Gou 40] *(appl continue dans {0,1})*

Rq : en particulier, si A est connexe, alors l'adhérence de A est connexe.

Prop : réunion de connexes [Gou 40] *(appl continue dans {0,1})*

Prop : produit d'un nombre fini d'espaces connexes [Gou 40] *(appl continue dans {0,1})*

C-ex : l'intersection de connexes n'est pas forcément connexe (dessin) [Pom 72]

2) Composantes connexes

Déf : union de tous les connexes contenant x, qui reste connexe. On note CC [Gou 41] *(savoir qu'on peut les définir par la relation d'équivalence « xRy ssi il existe un connexe qui contient x et y »)*

Proprietés : [Gou 41]

- Les composantes connexes de X forment une partition de X

- X est connexe ssi il a une seule composante connexe
- Une composante connexe est toujours fermée (utiliser A connexe => adh(A) connexe))
- Si X a un nombre fini de CC, alors chaque CC est ouverte

Prop : le nombre de composantes connexes d'un produit d'espaces topologiques est égal au produit des nombres de CC de chaque espace [???]

Th : th de Jordan. Soit gamma une courbe simple et fermée. Alors le complémentaire de gamma est constituée de deux composantes connexes : l'une intérieure à gamma, bornée, et l'autre extérieure, non bornée [LFA 108] *(savoir que c'est difficile à montrer)*

3) Connexes de R

Th : Les connexes de R sont les intervalles [Gou 41] *(un connexe est un intervalle : facile. Un intervalle est connexe : fonction continue dans {0,1})*

Csq : sur R, connexité et convexité coïncident.

Csq : théorème des valeurs intermédiaires [Gou 41]

Appl : un polynôme de degré impair à toujours une racine réelle [Pom 74]

Appl : Brouwer en dimension 1 (appl continue de [0,1] dans [0,1]) [Nou 11]

4) Connexité par arcs

Déf : connexe par arc [Gou 42]

Th : convexe => étoilé => connexe par arcs => connexe [Gou 42] (fonction continue dans {0,1})

C-ex : espace peigne ([Gou 45]) ou sin(1/x) ([Cho 47])

Prop : les pptés ?, ? et ? sont vraies pour connexe par arcs (union de cpa, produit de cpa, image continue de cpa) [Cho 50]

Appl : R et R^2 ne sont pas homéomorphes [Gou 47] *(on suppose qu'il existe un homéo f entre R et R^2, alors $f(R^2\backslash\{0\})$ est connexe, mais comme f est bijective, c'est R privé de f(0) donc pas connexe)*

Prop : Si E est un R-evn, et A une partie <u>ouverte</u> de E, alors A est connexe ssi A est connexe par arcs [Gou 42] *(connexité par lignes brisées)*

II) Utilisation de la connexité en analyse

1) Premières utilisations

Prop : (E,d) espace métrique compact, u_n suite de E tq lim(d(u_n,u_{n+1}))=0. L'ens des valeurs d'adhérence de u_n est connexe [Gou 46]

Prop : une forme linéaire est continue ssi E\Ker n'est pas connexe par arcs [Pellerin] *(sens facile : si f est continue, E\Ker est l'union des x tq f(x)>0 et des x tq f(x)<0, ouverts disjoints dc non connexe donc non connexe par arcs. Autre sens : par l'absurde on suppose f non continue. E\Ker est tj union des deux mêmes ensembles qui sont convexes donc connexes par arcs. Si on montre qu'on arrive à relier ces deux ensembles par un chemin, on aura montré la connexité par arcs de E\Ker, contradiction. Si f est nulle, c'est facile. Sinon, f est surj donc il existe a tq f(a)=1. f(-a)=-1 donc est dans l'autre ensemble. Il suffit de relier a et –a. C'est hyper calculatoire à faire)*

Déf : localement connexe

Prop : si E est un espace métrique complet, connexe et localement connexe, il n'y a pas de partition de E en fermés non vides, différents de E, disjoints [GT 41]

2) En calcul différentiel

Prop : U connexe de R^n. F est constante sur U ssi df=0 partout.

Lemme : Milnor [GT61]

Th : Boule chevelue [GT62]

Th : Brouwer [GT63]

3) Principe du prolongement analytique

Th : zéros isolés. Si f est holomorphe sur U connexe, et qu'on note Z(f) l'ensemble de ses zéros, alors Z(f) est l'espace entier ou Z(f) n'a pas de point d'accumulation. Dans le 2^{e} cas, Z(f) est au plus dénombrable [Rud 251], [BMP 53]

Cor : principe du prolongement analytique : U ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous ensemble D de U contenant un point d'acc dans U, alors elles sont égales [BMP 54] *(car f-g est nulle sur un ensemble avec un pt d'acc)*

Rq : le comportement d'une fonction holomorphe sur un disque arbitrairement petit détermine son comportement sur C entier.

Ex : il existe une unique fct holomorphe tq f(1/n)=1/n pour tout n, et c'est l'identité [BMP 77]

Appl : densité des polynômes orthogonaux [BMP 140] *(à un moment, F=0 sur un voisinage de 0, mais comme F est holomorphe, F=0 sur un espace plus grand (connexe))*

Appl : prolongement de la fonction gamma d'Euler [BMP 82]

Appl : soit une série entière de rayon de cv 1, de somme f. On note F la frontière du disque de cv. Un point a de F est dit régulier s'il existe un disque D centré en a tq f admet un prolongement analytique sur D. Sinon, a est singulier. Alors il y a toujours un point singulier sur F [ZQ 51] *(pas évident. RpA et on montre que le disque de cv est un peu plus grand que prévu)*

4) Simple connexité [Tau]

Définition : homotopie. Simple connexité : connexe + toute courbe fermée est homotope à un point (un ouvert U connexe est simplement connexe si tous les lacets de U sont homotopes dans U. Deux lacets sont dits homotopes dans U s'il existe une déformation qui envoie l'un sur l'autre tout en restant dans U) [Tau 127]

Prop : tout ouvert étoilé est simplement connexe [Tau 130]

Th : tout ouvert simplement connexe différent de C est bi-holomorphe au disque unité [Tau 158]

Th : sur un ouvert simplement connexe : toute fonction holomorphe admet une primitive holomorphe [Tau 158]

5) Déterminations (peut être supprimer)

Déf : U un ouvert ne contenant pas zéro. Une détermination du logarithme sur U est une application définie sur U inverse à droite de exp [BMP 74]

Prop : deux déterminations continues du logarithme diffère de 2ikPi [BMP 75] (exp(f)=exp(g)=1 donc exp(f-q)=id donc f-g est à valeurs dans 2iPiZ mais comme c'est continu sur un connexe…)

Prop : U simplement connexe contenant pas 0 => détermination holomorphe du log [BMP 75] *(vient du fait que 1/z admet une primitive holomorphe)*

III) Connexité et groupes topologiques

1) Groupes topologiques

Déf : groupe topologique

Prop : G un groupe topologique, H un sg. Si H est ouvert, alors il est aussi fermé.

Csq : si G est un sg connexe, tout sg ouvert de G est égal à G

Appl : surjectivité de l'exp *(contient un ouvert par TIL, comme c'est un groupe, c'est un ouvert, aussi fermé, donc connexe)*

Appl : SO3(C) isomph à PSL_2(C)

2) Etude de la connexité de quelques groupes classiques

Rq : d'après la partie 1, les parties ouvertes de Mn(K) sont connexes ssi elles sont connexes par arcs.

Prop : GLn(C) est connexe par arcs [MT 17] *C'est plus compliqué pour GLn+(R).*

Appl : l'ensemble des matrices complexes de rang r est connexe [MT]

Prop : H connexe et G/H connexe => G connexe [MT 31]

Appl : SO(n,R) est connexe [MT 34] *(action sur sphère de R^n, utilise O(n) compact + th homéo version simple + connexité sphère. Attention, la démo ne marche pas pour SO(n,C) n'est pas compact !) (la sphère est connexe car image de l'appl x/N(x) de R^n\{0})*

Appl : SO3(R) est simple *(savoir que PSOn(R) est simple pour n≥5 [Szp 327]. SO(4) n'est pas simple car contient le sg distingué {Id, -Id} (pareil pour tout n pair). Reste les cas PSO(2) et PSO(4). PSO(4) est isomorphe à SO(3)xSO(3) (quaternions) donc non simple [Per 166] SO(2) est commutatif donc sûrement pas simple…)*

Csq : O(n,R) a deux CC [MT 34]

Rq : en fait, SO(n,R) est connexe par arcs [MT 35] *(SO(n,C) est connexe mais c'est tendu. On déduit de la décomp polaire complexe un homéo entre O(n,C) et An(R)xO(n,R), ce qui donne 2 CC pour On(C))*

Th : U(n,C) et SU(n,C) sont connexes [MT 37] *(action sur sphère de C^n)*

Th : decomp polaire. GLn(R)=O(n,R)*S ; GLn(C)=O(n,C)*H_n [MT 20]

Csq : GLn(R) a deux CC [MT 35] *(il faut mq GLn+(R) est connexe. Pour ça, GLn+(R) agit transitivement sur R^n\{0}, on calcule le stab, on utilise le gros th d'homéo, on finit par récurrence. Ou alors on le déduit de la decomp polaire)*

Appl : l'ensemble des matrices réelles de rang r est connexe [MT] *(image continue de GLn+ par GLm+ par (P,Q)->PMQ^-1)*

Th : O(p,q)=O(p)xO(q)xR^pq (se sert de la décomp polaire)

Th : O(p,q) a 4 composantes connexes ; les détailler [MT 107] + [DSerr 85]

Développements :
1 - SO(3) est simple [???] (**)
2 - Impossibilité d'une partition dénombrable en fermés [GT topologie 41] (***)

3 - SO3(C) isomorphe à PSL_2(C) [???] (*ou**)

Rapport du jury :

De très bons candidats proposent de démontrer la simplicité du groupe SO3(R) comme application de la connexité. Ils semblent désemparés lorsque le jury demande d'établir que ni SO2(R), ni SO4(R) ne sont simples. Bien distinguer sur des exemples, connexité et connexité par arcs.

Ce que je n'ai pas mis :

- Si M est une sous varieté, et que A est un connexe de M, alors A est connexe par arcs (http://forums.futura-sciences.com/mathematiques-superieur/174743-variete-connexite.html)
- (E,d) espace métrique connexe. F fermé de E. On supp que la frontière de F est connexe. Alors F est connexe [Gou 43]
- Local connexité
- Th de Darboux [Gou 47]
- Cauchy Lipschitz ?
- Appl : f holomorphe sur U connexe. Soit f_n la dérivée ne de f. On supp que f_n cv unif sur tout compact. Alors la limite f est proportionnelle à exp [BMP 80] *(utilise le th de Weierstrass de BMP69 et le fait qu'une fonction dont la différentielle s'annule sur un ouvert connexe est constante)*
- Principe du maximum qui s'énonce sur un ouvert connexe (et qui utilise le prolongement analytique) + appl exo 2.7 et 2.8 BMP 80
- Matrices de rang <r
- Connexité de l'ensemble des matrices dont le poly min est égal au poly caract [MT 39]
- Si K est un espace topologique connexe et compact, et que x est un point de K, alors x est adhérent à toutes les composantes connexes de K\{x} (http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?14,575438 + http://www.daniel-saada.eu/fichiers/20-connexite_et_compacite.pdf)
- Composantes connexes d'un groupe top [MT 32]
- Appl : U connexe => H(U) anneau intègre [BMP 73] *(on supp fg=0, mais fg a un nb dénombrable de zéros, abs. Rq : son corps de fractions est l'ensemble des fcts méromorphes [Rud 353]. Donc toute fct méromorphe est quotient de deux fcts holo, mais c'est pas évident)*

Bibiliographie :

[Gou] Gourdon – Analyse
[Cho] Choquet – Cours de topologie
[Nou] Nourdin
[LFA] Lelong Ferrand Arnaudiès – Analyse
[Rud]
[MT]
[BMP] Objectif agrégation
[GT] Gonnord Tosel – Topologie et analyse fonctionnelle
[Tau] Tauvel – Analyse complexe
[ZQ]
[DSerr] Denis Serre – Les matrices